Предложенная модель применена к описанию динамики численности популяции рыжей полевки, обитающей в Удмуртии (рис. 2). Оценки коэффициентов модели получены путем минимизации различий между модельными значениями и реальными данными учета численности при помощи метода Левенберг-Марквардта. Установлено, что точечная оценка параметров модели находится в зоне цикла длины 6 (возникшего в результате бифуркации удвоения периода 3-цикла), однако влияние климатических факторов смещает ее в зону квазипериодической динамики.

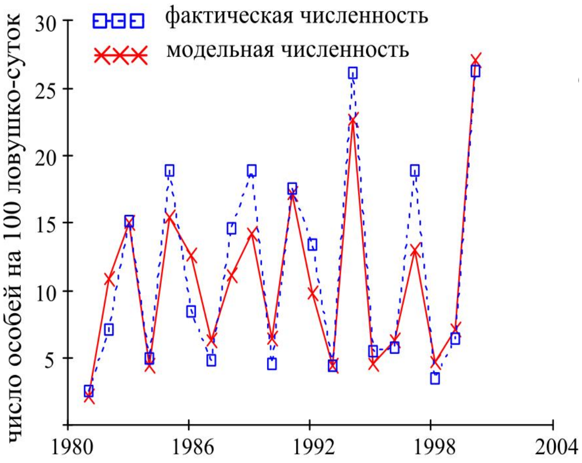

Рис. 2. Динамика относительной численности популяции рыжей полевки.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований «Дальний Восток».

УПРАВЛЕНИЕ СТРУКТУРОЙ ДВУХВИДОВОЙ СИСТЕМЫ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА» С МИГРАЦИЕЙ

А. С. Иванова, А. Н. Кириллов
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

В классической работе [1] представлены «условия ухода популяции хищника из ареала» для статичной модели. В работе [2] построена модель системы Вольтерра «хищник – жертва», в которой хищник может мигрировать в другие ареалы в случае недостатка жертв. В представленном докладе в данную модель вводится управление, заключающееся в изъятии особей хотя бы одного из видов, и исследуется задача сохранения структуры биосообщества за счет выбора скоростей изъятия.

Итак, рассмотрим модель «хищник – жертва» с миграцией, учитывающую изъятие особей:

если $\tilde{n} > \Lambda$:

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2 - u_1), \qquad \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m - u_2), \qquad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \tag{1}$$

если $\tilde{n} < \Lambda, x_2 > \varepsilon^*(x_1)$:

$$\dot{x}_1 = ax_1, \qquad \dot{x}_2 = -mx_2, \qquad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \tag{2}$$

если $\tilde{n} < \Lambda, 0 < x_2 \le \varepsilon^*(x_1)$:

$$\dot{x}_1 = 0, \qquad \dot{x}_2 = -c, \qquad \dot{\tilde{n}} = 0, \tag{3}$$

если $\tilde{n} < \Lambda, x_2 = 0$:

$$\dot{x}_1 = ax_1, \qquad \dot{x}_2 = 0, \qquad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \tag{4}$$

если $\tilde{n} = \Lambda, x_2 \le \varepsilon^*(x_1)$:

$$\dot{x}_1 = 0, \qquad \dot{x}_2 = c, \qquad \dot{\tilde{n}} = 0, \tag{5}$$

где $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$ – показатели численности жертв и хищников соответственно; $\tilde{n} = \tilde{n}(t)$ – структурная переменная, т.е. переменная, «управляющая» структурой сообщества; a – коэффициент прироста жертв в отсутствие хищников; bx_1 – количество жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени; m – коэффициент смертности хищников при отсутствии жертв; k – доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство; u_1, u_2 – коэффициенты изъятия жертв и хищников соответственно, причем, $a, b, m, k, \Lambda, \lambda, c$ считаются положительными постоянными (k<1); u_1, u_2 – управляющие параметры – неотрицательные постоянные, одновременно необращающиеся в ноль ($a > u_1$); $\varepsilon^*(x_1)$ – непрерывная пороговая функция, задаваемая парой равенств:

$$\varepsilon^*(x_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} x_1, & 0 \le x_1 < \varepsilon\lambda, \\ \varepsilon, & x_1 \ge \varepsilon\lambda, \end{cases},$$

где ε – положительная постоянная.

Можно продемонстрировать, что для системы (1)–(5) множество $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 > 0, x_2 \ge 0\}$ инвариантно, поэтому $x_1 > 0, x_2 \ge 0$.

Система (1) описывает взаимодействие между хищником и жертвой (полный режим P_2), (2) – миграцию хищника (переходный режим P_{21}), (3) – исчезновение хищника из сообщества (минус-скачок P_-), (4) – динамику жертвы при отсутствии хищника (нулевой режим P_1), (5) – появление хищника в сообществе (плюс-скачок P_+).

Замечание 1. Продолжение траектории системы (1)–(5) на плоскость $p = \tilde{n} - \Lambda = 0$ требует особого рассмотрения, которое для краткости не приводится.

Определение 1. Динамической структурой биосообщества называется совокупность режимов $\{P_2, P_{21}, P_1\}$.

Пусть $M(x_1, x_2)$ – точка плоскости $p = 0$.

Определение 2. Если траектория системы (1), начавшаяся в M, содержится в полупространстве $\tilde{n} \ge \Lambda$, то M называется *точкой сохранения режима* P_2.

Постановка задачи: требуется найти значения управляющих параметров u_1, u_2, при которых сохраняется режим P_2.

В результате исследования были получены следующие результаты.

Утверждение 1. Если u_1, u_2 удовлетворяют уравнению $\lambda = \dfrac{m+u_2}{(a-u_1)k}$ и отсутствует ограничение на $\tilde{n}$, то траектории системы (1) замкнуты. При этом если сохранить условие $\tilde{n} > \Lambda$, то:

а) интервал прямой $p = 0, q = x_1 - \lambda x_2 = 0$ при $0 < x_1 < \dfrac{m+u_2}{bk}$ состоит из точек сохранения режима P_2.

б) луч $p = 0, q = 0, x_1 \geq \dfrac{m+u_2}{bk}$ состоит из положений равновесия системы (1)–(5).

Пусть $M_0(x_{10}, x_{20})$ – произвольная точка множества $\{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_2 \geq \varepsilon\}$.

Утверждение 2. Пусть u_1, u_2 удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} -\ln \dfrac{(1+k\lambda)b}{a+m-u_1+u_2} = \dfrac{(a-u_1)\ln x_{20} - bx_{20} + (m+u_2)(\ln x_{10} - \ln \lambda) - kbx_{10}}{a+m-u_1+u_2} + 1, \\ a+m-u_1+u_2 > 0, \\ u_1 > 0, \\ u_2 > 0. \end{cases}$$

Тогда M_0 является точкой сохранения режима P_2.

Утверждение 2 не дает явных выражений для u_1, u_2. Но справедливым является следующий результат.

Пусть $\varepsilon \leq \dfrac{a}{b}$. Введем обозначения для двух множеств плоскости $p = 0$ через Ω обозначим множество $\left\{(x_1, x_2) : 0 < x_2 < \dfrac{x_1}{\lambda}\right\}$, а через Π – множество $\left\{(x_1, x_2) : x_1 \geq \dfrac{m}{bk}, \varepsilon \leq x_2 \leq \dfrac{a}{b}\right\}$.

Утверждение 3. Пусть $M_0(x_{10}, x_{20}) \in \Omega \cap \Pi$. Тогда существует управление $u_1 = a - bx_{20}, u_2 = bkx_{10} - m$, при котором M_0 является точкой сохранения режима.

Замечание 2. Любая точка плоскости $p = 0$ принадлежащая множеству $\{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < \lambda x_2\}$, является точкой режима P_{21}.

Литература

1. Charnov, E.L. Optimal Foraging, the Marginal Value Theorem // Theoretical Population Biology. 1976. V. 9. № 2. P. 129–136.

2. Кириллов А. Н. Экологические системы с переменной размерностью // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1999. Т. 6. Вып. 2. С. 318–336.