по повышению плодородия земель для категории земель или объекта (участка) проводится расчетно-конструктивным методом.

ВЫВОДЫ

Особенности учета времени, неопределенности и рисков при установлении показателей эффективности инвестиций в мелиорацию земель определяются ограниченностью земельных ресурсов высокого уровня плодородия и продолжительностью реализации проектов мелиорации.

Замена дисконтированного чистого дохода на его модификацию – земельную ренту на единицу площади – и определение расчетной цены земли позволяют решить вопрос о приведении к сопоставимому виду эффектов в проектах мелиорации длительного или бесконечного действия.

При расчетах эффективности инвестиций в мелиорацию необходимо учитывать тенденцию нормы дисконта к снижению во времени из-за уменьшения инфляционных рисков вложений в плодородие земель.

Норматив дисконтирования при определении эффективности мелиорации увеличивается или уменьшается в зависимости от ожидаемого срока службы фондов мелиорации и ввиду возможности рефинансирования накопленных сумм амортизационных отчислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Виленский П. Л., Лифшиц В. П., Смоляк С. А. 2001. Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика. М. 832 с.

Методические рекомендации по государственной кадастровой оценке земель сельскохозяйственного назначения. Утв. Приказом Минэконом развития и торговли России от 01.07.2005 г. № 145. 2005. М.

Методические рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов. 2-я редакция. Утв. Минэкономики РФ, Минфином РФ и Госстроем РФ от 21.06.1999 г. № ВК 477. 2000. М. 263 с.

Никитин И. Д., Артемьева З. Н., Григорашенко Е. Е., Карпенко О. А., Лохматов Е.М. 2010. Оценка земель мелиоративного фонда. Спб., ОАО «СевНИИГиМ». 338 с.

Федоренко Н. П. (ред.). 1989. Комплексная оценка эффективности мероприятий, направленных на ускорение научно-технического прогресса. Методические рекомендации. М. 118 с.

Экономика мелиорации земель Нечерноземной зоны РСФСР. Справочник. Л., 1978. 288 с.

УДК [631.43+004.65]

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЧВЫ КАК КАПИЛЛЯРНО-ПОРИСТОГО ТЕЛА И УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДА МУАЛЕМА-ВАН ГЕНУХТЕНА: ТЕОРИЯ

В. В. Терлеев[1], М. А. Нарбут[2], Топаж А. Г.[3], В. Миршель[4]

[1] Национальный исследовательский Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251, Россия

[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., д.7-9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

[3] Агрофизический научно-исследовательский институт, Гражданский пр-т, 14, Санкт-Петербург, 195220, Россия

[4] Leibniz Centre of Agricultural Landscape Research (ZALF), Eberswalder Strasse, 84, Muencheberg, 15374, Germany

E-mail: Vitaly_Terleev@mail.ru

Поступила в редакцию 04 мая 2014 г., принята к печати 05 июня 2014 г.

В рамках концепций о капиллярности и логнормальном распределении эффективных радиусов почвенных пор представлено теоретическое обоснование функции дифференциальной влагоемкости почвы и первообразной этой функции как характеристики водоудерживающей способности почвы в виде зависимости приведенной объемной влажности почвы от капиллярного давления влаги. С использованием данных функций и метода Муалема вычислено отношение гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги. Параметры почвенно-гидрофизических моделей интерпретированы. Предложены аппроксимации функций, описывающих водоудерживающую способность почвы и отношение гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги. Параметры аппроксимирующих функций оценены по физико-статистическим показателям почвы.

Ключевые слова: дифференциальная влагоемкость почвы, водоудерживающая способность почвы, гидравлическая проводимость почвы, капиллярность, логнормальное распределение эффективных радиусов почвенных пор.

ВВЕДЕНИЕ

В агрофизике, агрометеорологии и гидромелиорации для расчета динамики почвенной влаги широко применяется уравнение Ричардса, которое относится к классу дифференциальных уравнений в частных производных и в одномерном случае имеет вид:

$$\mu\,\partial\psi/\partial t = \partial\big(k(\partial\psi/\partial x - 1)\big)/\partial x - f_x, \qquad (1)$$

где t - время (сут.); x - пространственная координата на оси (см), направленной вертикально вниз с началом отсчета на поверхности почвы; ψ - капиллярное давление почвенной влаги (см вод. ст.); μ - коэффициент дифференциальной влагоемкости почвы (см вод.ст.$^{-1}$); k - коэффициент гидравлической проводимости почвы (см·сут.$^{-1}$); f_x - функция стока, описывающая поглощение воды корнями растений (сут.$^{-1}$) (Полуэктов и др., 2003).

Для решения уравнения (1) необходимо описать входящие в него коэффициенты в явном виде. Известно, что они являются функциями $\mu = \mu(\psi)$ и $k = k(\psi)$, однако поиск формализации этих коэффициентов наталкивается на проблему отсутствия их исчерпывающего обоснования в рамках фундаментальных представлений о взаимодействии воды и твердой фазы почвы (Poluektov *et al.,* 2002; Баденко и др., 2011, 2013). Поэтому в качестве коэффициентов уравнения Ричардса обычно используются эмпирические зависимости, которые с той или иной точностью интерполируют экспериментальные данные (Заславский, Терлеев, 1988; Банкин др., 1988; Заславский и др., 1988; Арефьев и др., 2011; Терлеев и др., 2012а). Однако проблематичность физической интерпретации таких зависимостей неизбежно ставит вопрос о степени их универсальности.

В лабораториях принято измерять не функцию $\mu(\psi)$, а ее первообразную - изотерму десорбционного равновесия воды в виде зависимости объемной влажности почвы θ (см^3·см$^{-3}$) от капиллярного давления влаги ψ. Как известно, данная зависимость является показателем водоудерживающей способности почвы и называется основной гидрофизической характеристикой (ОГХ) почвы (Глобус, 1969). Расчет дифференциальной влагоемкости почвы обычно сводится к интерполяции измеренной ОГХ и подбору аппроксимирующей функции, которая затем используется в вычислениях по формуле $\mu = d\theta/d\psi$. Вместе с тем, дифференцирование аппроксимаций является по определению неустойчивой операцией, которая может приводить к физически абсурдным результатам. В качестве негативного примера можно привести степенную функцию, широко применявшуюся ранее для интерполяции точек измененной ОГХ для последующего расчета μ. Но имеется и ряд позитивных примеров использования аппроксимаций ОГХ, к числу которых относится модель:

$$\bar\theta = 1\Big/\big(1 + (-\alpha\psi)^n\big)^m, \qquad (2)$$

где $\bar\theta = (\theta - \theta_r)/(\theta_s - \theta_r)$ - приведенная объемная влажность почвы, θ_s - объемная влажность полного насыщения почвы влагой, θ_r - минимальный удельный объем жидкой воды в почве, α и n - эмпирические параметры.

При $m = 1 - 1/n$ модель (2) представляет собой аппроксимацию ОГХ, предложенную Ван Генухтеном (Van Genuchten, 1980), а при $m = 1$ зависимость (2) имеет форму аппроксимации ОГХ предшественников (Brutsaert, 1966; Ahuja, Swartzendruber, 1972; Haverkamp *et al.*, 1977). Ван Генухтен использует модель (2) для расчета отношения функции гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации почвенной влаги k_s по методу Муалема (Mualem, 1976):

$$k/k_s = \sqrt{\bar\theta}\left(\int_0^{\bar\theta} d\bar\theta/\psi \Big/ \int_0^1 d\bar\theta/\psi\right)^2. \qquad (3)$$

С использованием переменной $y = \bar\theta^{1/m} = 1\big/\big(1 + (-\alpha\psi)^n\big)$ выражение (3) приводится к виду:

$$k/k_s = \sqrt{\bar\theta}\left(\int_0^{\bar\theta^{1/m}} y^{m-1+1/n}(1-y)^{-1/n}dy \Big/ \int_0^1 y^{m-1+1/n}(1-y)^{-1/n}dy\right)^2. \quad (4)$$

В случае $m = 1 - 1/n$ выражение (4) допускает несложное аналитическое вычисление, а результат интегрирования является следующим:

$$k/k_S = \sqrt{\bar{\theta}}\left(1 - \left(1 - \bar{\theta}^{1/m}\right)^m\right)^2. \qquad (5)$$

Формула (5) привлекает своей простотой, а также тем, что входящие в нее параметры являются общими и для функции гидравлической проводимости почвы, и для аппроксимации ОГХ (2). Именно поэтому модель (2) с отношением $m = 1 - 1/n$ заняла лидирующие позиции в семействе моделей водоудерживающей способности почвы и вкупе с зависимостью (5) имеет наиболее широкое применение в агрофизических и агрометеорологических расчетах. Описание гидрофизических свойств почвы с использованием моделей (2) и (5), имеющих общие параметры, принято называть методом Муалема-Ван Генухтена.

В литературе отмечается, что для почвы относительно однородной текстуры (песок, супесь, глина) высокая точность интерполяции экспериментальных данных с использованием аппроксимации ОГХ (2) достигается при выполнении соотношения $m = 1 - 1/n$, а для почвы менее однородного гранулометрического состава (суглинок) модель (2) наиболее точно интерполирует точки измеренной ОГХ при $m = 1$ (Vereecken *et al.*, 2010). Успешному применению модели (2) в качестве аппроксимации ОГХ для широкого набора разновидностей почвы препятствуют следующие три проблемы. Во-первых, физически адекватное описание ОГХ, дифференциальной влагоемкости и гидравлической проводимости почвы до сих пор не предложено. Во-вторых, обоснованность соотношения $m = 1 - 1/n$, связывающего два параметра аппроксимации ОГХ и применяемого для упрощения аналитического интегрирования в формуле Муалема, более чем проблематична. В-третьих, представленная в литературе интерпретация параметров α и n модели (2) при $m = 1 - 1/n$ остается весьма дискуссионной.

Целью данной работы является: *a*) теоретическое обоснование и формулирование системы функций с общими и адекватно интерпретированными параметрами, объединяющей функцию дифференциальной влагоемкости почвы, ее первообразную в виде ОГХ и отношение функции гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги; *b*) аппроксимация зависимостей $\theta(\psi)$ и $k(\psi)/k_S$ в классе элементарных функций и оценивание параметров аппроксимирующих функций по физическим показателям почвы.

Дифференциальная влагоемкость и водоудерживающая способность почвы

Известно, что в почвах естественного сложения поры являются преимущественно капиллярными. В поперечном сечении капилляры весьма различаются и по конфигурации, и по площади, что обусловлено случайным сочетанием контактирующих почвенных частиц различной формы и объема. В качестве основы моделирования гидрофизических свойств почвы, твердая фаза которой состоит преимущественно из минералов, не набухающих при увлажнении, здесь принято представление о системе цилиндрических пор кругового поперечного сечения, эквивалентной по своим капиллярным свойствам реальному поровому пространству почвы, а для описания распределения объемов почвенных капилляров используется модель случайной логарифмически нормальной величины – *эффективного радиуса поры* (D'Hollander, 1979; Kosugi, 1996; Терлеев, 2000; Полуэктов, Терлеев, 2002, 2005; Терлеев и др., 2014). По аналогии с работой Косуги в качестве эффективного радиуса почвенной поры примем величину $\bar{r} = (r - r_{\min})/(r_{\max} - r)$, где r - радиус поры; $r_{\min}$ - радиус мельчайшей поры, а $r_{\max}$ - радиус самой крупной поры (Kosugi, 1994).

С учетом случайного характера поперечного сечения почвенных пор запишем соотношения для расчета доли объема порового пространства $\bar{\theta}_1$, которая приходится на капилляры, начиная с мельчайших, и заканчивая порами эффективного радиуса $\bar{r}$:

$$\begin{cases} d\bar{\theta}_1/d\bar{r} = f(\bar{r}) = \exp\left(-1/\left(2\sigma^2\right)\ln^2\left(\bar{r}/\bar{r}_0\right)\right)/\left(\bar{r}\sigma\sqrt{2\pi}\right), \\ \bar{\theta}_1 = \int\limits_0^{\bar{r}} f(\bar{r})d\bar{r}, \end{cases} \tag{6}$$

где $f(\bar{r})$ - плотность логнормального распределения случайной величины $\bar{r}$; $\ln\bar{r}_0$ и σ - наиболее вероятное значение и среднеквадратическое отклонение логарифмов эффективных радиусов почвенных пор, соответственно.

Введем переменную $x = \ln(\bar{r}/\bar{r}_0)/(\sigma\sqrt{2})$ и перепишем формулы (6) следующим образом:

$$\begin{cases} d\bar{\theta}_1/dx = \exp\left(-x^2\right)/\sqrt{\pi}, \\ \bar{\theta}_1 = \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-x^2\right)dx/\sqrt{\pi} = (\operatorname{erf}(x)+1)/2 = (1/2)\operatorname{erfc}(-x), \end{cases} \tag{7}$$

где $\operatorname{erf}(x)$ - *функция ошибок* ($\operatorname{erf}(x_0)=0$ и $\bar{\theta}_1(x_0)=1/2$ при $x = x_0 = 0$); $\operatorname{erfc}(x) = 1-\operatorname{erf}(x)$.

Из формул (7) вытекает соотношение:

$$4\bar{\theta}_1\left(1-\bar{\theta}_1\right) = 1-\operatorname{erf}^2(x). \tag{8}$$

Воспользуемся *аппроксимацией Виницкого* $1-\operatorname{erf}^2(x) \approx \exp\left(-x^2\left((4/\pi)+ax^2\right)/\left(1+ax^2\right)\right)$, $a = 8(\pi-3)/(3\pi(4-\pi))$ и приведем ее к более простому виду: $1-\operatorname{erf}^2(x) \approx \exp\left(-x^2\right)$ (Winitzki, 2008; Терлеев и др., 2012б). Из формул (7) и (8) вытекает приближенное равенство $d\bar{\theta}_1/\left(\bar{\theta}_1\left(1-\bar{\theta}_1\right)\right) \approx \left(4/\sqrt{\pi}\right)dx$; в нем, заменив переменную $\bar{\theta}_1$ новой переменной $\bar{\theta}_2$, а знак приближенного равенства знаком точного равенства, получим аналог уравнения Ферхюльста $d\bar{\theta}_2/\left(\bar{\theta}_2\left(1-\bar{\theta}_2\right)\right) = \left(4/\sqrt{\pi}\right)dx$. Решением полученного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с граничным условием $\bar{\theta}_2(x)\big|_{x=0} = \bar{\theta}_1(x)\big|_{x=0} = 1/2$ является логистическая кривая $\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_2(x)$, которая аппроксимирует зависимость $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(x)$ в классе элементарных функций:

$$\bar{\theta}_1 = (1/2)\operatorname{erfc}(-x) \approx \bar{\theta}_2 = 1/\left(\exp\left(-4x/\sqrt{\pi}\right)+1\right). \tag{9}$$

Учитывая связь между величинами x и $\bar{r}$, приведем формулу (9) к виду:

$$\bar{\theta}_1 = (1/2)\operatorname{erfc}\left(\left(1/\left(\sigma\sqrt{2}\right)\right)\ln\left(\bar{r}_0/\bar{r}\right)\right) \approx \bar{\theta}_2 = 1\bigg/\left(1+\left(\bar{r}/\bar{r}_0\right)^{-4/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)}\right). \tag{10}$$

Для преобразования формулы (9) рассмотрим возможность перехода от $\bar{r}$ к ψ, а также от $\bar{\theta}_1$ к $\bar{\theta}$. Как известно, разность между значениями абсолютного давления под искривленной границей раздела «воздух-капиллярная влага» P и под плоской поверхностью свободной воды P_a называется *капиллярным давлением влаги*, для расчета которого применяется *закон Лапласа:*

$$\psi = P - P_a = -\beta/r,$$

где r - радиус почвенного капилляра, $\beta = 2\gamma\cos\varphi/\left(g\rho_w\right)$, γ - коэффициент поверхностного натяжения почвенной влаги на границе с воздухом, φ - краевой угол смачивания водой поверхности частиц почвы, g - ускорение свободного падения, ρ_w - плотность воды.

При физическом моделировании иссушения почвы с помощью пневматического пресса вытеснение из нее воды достигается воздействием избыточного давления атмосферных газов на исходно насыщенный влагой (без защемленного воздуха в порах) почвенный образец, который помещен на пористую мембрану. С увеличением газового давления над поверхностью воды в почвенных порах от нормального внешнего атмосферного давления P_a до значения P_{ae} происходит растворение воздуха в воде, однако содержание воды в поровом пространстве практически не изменяется, и объемная влажность почвы остается равной θ_s. Избыточное газовое давление передается воде, абсолютное давление которой также повышается. При достижении избытка давления газов значения $\Delta P_{ae} = P_{ae} - P_a$ сила взаимодействия между молекулами воды и поверхностью почвенных частиц ослабевает настолько, что часть воды переходит в категорию свободной гравитационной влаги и стекает из почвы через мембрану в поддон, а освободившийся объем пор занимает воздух. Избытку газового давления в пневматическом прессе относительно внешнего атмосферного давления соответствует значение капиллярного давления влаги в самой крупной почвенной поре $\psi_{ae} = -\Delta P_{ae} = -\beta/r_{max} < 0$. Это значение называется *давлением барботирования*; его далее будем рассматривать в качестве «*начала отсчета*» капиллярного давления влаги. Для случая $r_{min} << r$ примем $r_{min} = 0$ и с учетом того, что $\bar{r} = (r - r_{min})/(r_{max} - r)$, получим формулы:

$$\begin{cases} \psi - \psi_{ae} = -\beta/(r_{max}\bar{r}); \\ \psi_0 - \psi_{ae} = -\beta/(r_{max}\bar{r}_0), \end{cases}$$

где $\bar{r}_0 = r_0/(r_{max} - r_0)$; r_0 - радиус почвенной поры, которому соответствует наиболее вероятное значение $\ln \bar{r}_0$ случайной величины $\ln \bar{r}$.

Воспользуемся полученными формулами и введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} \alpha = -1/(\psi_0 - \psi_{ae}) = r_{max}\bar{r}_0/\beta; \\ n = 4/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right). \end{cases} \qquad (11)$$

Используя закон Лапласа и обозначения (11), приведем соотношение (10) к виду:

$$\bar{\theta}_1 = \begin{cases} (1/2)\operatorname{erfc}\left(\left(n\sqrt{\pi}/4\right)\ln(-\alpha(\psi - \psi_{ae}))\right) \approx \bar{\theta}_2 = 1/\left(1 + (-\alpha(\psi - \psi_{ae}))^n\right), \psi < \psi_{ae}; \\ 1, \psi \geq \psi_{ae}. \end{cases} \qquad (12)$$

Как известно, увлажнение почвы начинается с заполнения водой пор наименьшего размера, и лишь после их насыщения влага начинает занимать более крупные поры. Иссушение почвы начинается с вытеснения воды воздухом из пор наибольшего размера, и лишь после их опорожнения воздух начинает замещать воду в менее крупных порах. Во всех точках топологически сомкнутого водного пространства давление одинаково (*закон Паскаля*) и определяется наибольшим радиусом среди всех заполненных влагой пор. Учет этих фактов позволяет долю объема пространства пор $\bar{\theta}_1$ с эффективными радиусами, не превышающими $\bar{r}$, отождествлять с величиной приведенной объемной влажности почвы $\bar{\theta}$ при капиллярном давлении влаги ψ, которое однозначно соответствует величине $\bar{r}$, т.е. математическое тождество $\bar{\theta}_1 \equiv \bar{\theta}$ является физически обоснованным. В данном случае, во-первых, зависимость $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(\psi)$ является по определению ОГХ, и это позволяет переписать соотношение (12) в виде:

$$\begin{cases} \bar{\theta} = \begin{bmatrix} (1/2)\operatorname{erfc}\left(\left(n\sqrt{\pi}/4\right)\ln(-\alpha(\psi - \psi_{ae}))\right), \psi < \psi_{ae}; \\ 1, \psi \geq \psi_{ae}. \end{bmatrix} & (13a) \\ \bar{\theta} \approx \begin{bmatrix} 1/\left(1 + (-\alpha(\psi - \psi_{ae}))^n\right), \psi < \psi_{ae}; \\ 1, \psi \geq \psi_{ae}. \end{bmatrix} & (13b) \end{cases}$$

Во-вторых, зависимость $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(\psi)$ является первообразной функции приведенной дифференциальной влагоемкости почвы:

$$\bar{\mu} = d\bar{\theta}_1/d\psi = \begin{cases} -(n/4)/(\psi - \psi_{ae})\exp\left(-\pi(n/4)^2\ln^2(-\alpha(\psi - \psi_{ae}))\right), \psi < \psi_{ae}; \\ 0, \psi \geq \psi_{ae}. \end{cases} \qquad (14)$$

Для случая $r_{max} >> r$ примем $\psi_{ae} = 0$ и из формул (13*a*) и (14) придем к соотношениям, ранее полученным Косуги (Kosugi, 1994).

Отношение гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации почвенной влаги

По аналогии с работой Косуги (Kosugi, 1994) в расчетах по методу Муалема здесь не применяются эмпирические зависимости, которые интерполируют измеренную ОГХ, а используется функция приведенной дифференциальной влагоемкости почвы. Причем, данная функция теоретически обоснована в рамках представлений о капиллярности и геометрии порового пространства почвы. В соответствии с этими представлениями для случая тождественного равенства $\bar{\theta}_1$ и $\bar{\theta}$ зависимость $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(\psi)$ является первообразной функции приведенной дифференциальной влагоемкости почвы в форме ОГХ, а логистическая функция $\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_2(\psi)$ аппроксимирует ОГХ. Учитывая, что в соответствии с формулами (13*a*) и (13*b*) при значении капиллярного давления влаги ψ_{ae} приведенная объемная влажность почвы $\bar{\theta}$ достигает единицы, применяя тождество $\bar{\theta}_1 \equiv \bar{\theta}$ и соотношения (9) и (11), преобразуем формулу (3) к виду:

$$
\begin{aligned}
k/k_S &= \sqrt{\bar{\theta}}\left(\int_0^{\bar{\theta}} d\bar{\theta}/\psi \Big/ \int_0^1 d\bar{\theta}/\psi\right)^2 = \sqrt{\bar{\theta}}\left(\int_{-\infty}^{\psi}(d\bar{\theta}/d\psi)(d\psi/\psi) \Big/ \int_{-\infty}^{\psi_{ae}}(d\bar{\theta}/d\psi)(d\psi/\psi)\right)^2 = \\
&= \sqrt{\bar{\theta}}\left(\int_{-\infty}^{\psi-\psi_{ae}}\big(d\bar{\theta}/d(\psi-\psi_{ae})\big)\big(d(\psi-\psi_{ae})/(\psi-\psi_{ae})\big) \Big/ \int_{-\infty}^{0}\big(d\bar{\theta}/d(\psi-\psi_{ae})\big)\big(d(\psi-\psi_{ae})/(\psi-\psi_{ae})\big)\right)^2 = \\
&= \sqrt{\bar{\theta}_1(\bar{r})}\left(\int_0^{\bar{r}}\bar{r}(d\bar{\theta}_1/d\bar{r})d\bar{r} \Big/ \int_0^{\infty}\bar{r}(d\bar{\theta}_1/d\bar{r})d\bar{r}\right)^2 = \sqrt{\bar{\theta}_1(x)}\left(\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-x^2+x\sigma\sqrt{2}\right)dx \Big/ \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-x^2+x\sigma\sqrt{2}\right)dx\right)^2 = \\
&= \left(\sqrt{\bar{\theta}_1(x)}/4\right)\left(\operatorname{erf}\left(x-\sigma/\sqrt{2}\right)+1\right)^2 = \sqrt{\bar{\theta}(x)}\left(\bar{\theta}\left(x-\sigma/\sqrt{2}\right)\right)^2 \approx \sqrt{\bar{\theta}_2(x)}\left(\bar{\theta}_2\left(x-\sigma/\sqrt{2}\right)\right)^2.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Далее выполним переход от x к ψ и получим итоговые формулы, описывающие отношение функции гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации почвенной влаги, а также аппроксимацию этого отношения:

$$
\begin{cases}
k/k_S = \begin{cases} \left(1/\left(4\sqrt{2}\right)\right)\sqrt{\operatorname{erfc}\left(\left(n\sqrt{\pi}/4\right)\ln\left(-\alpha(\psi-\psi_{ae})\right)\right)}\left(\operatorname{erfc}\left(\left(n\sqrt{\pi}/4\right)\ln\left(-\alpha(\psi-\psi_{ae})\right)+2/\left(n\sqrt{\pi}\right)\right)\right)^2, \psi<\psi_{ae}; \\ 1, \psi \ge \psi_{ae}. \end{cases} & (16a) \\
k/k_S \approx \begin{cases} 1\Big/\sqrt{1+\left(-\alpha(\psi-\psi_{ae})\right)^n} \Big/ \left(1+\exp\left(8/(n\pi)\right)\left(-\alpha(\psi-\psi_{ae})\right)^n\right)^2, \psi<\psi_{ae}; \\ 1, \psi \ge \psi_{ae}. \end{cases} & (16b)
\end{cases}
$$

В частном случае (при $\psi_{ae} = 0$) отношение (16*a*) приводится к формуле Косуги (Kosugi, 1994). Модели (13*a*), (14) и (16*a*) образуют замкнутую по параметрам систему почвенно-гидрофизических функций, а зависимости (13*b*) и (16*b*) аппроксимируют ОГХ и отношение $k(\psi)/k_S$ в классе элементарных функций.

Интерпретация параметров гидрофизических функций почвы

Теоретически обоснованные модели (13*a*), (14) и (16*a*) имеют общие параметры, для которых здесь предложена физико-статистическая интерпретация. Параметр $\alpha = r_{max}\bar{r}_0/\beta$ определяется: во-первых, произведением радиуса наибольшей поры r_{max} и эффективного радиуса поры $\bar{r}_0$, при котором случайная величина $\ln\bar{r}$ достигает наиболее вероятного значения; во-вторых, капиллярными свойствами почвы, которые учитываются коэффициентом β в формуле Лапласа (если $r_{max} >> r_0$, то $\alpha = r_0/\beta$). Параметр $n = 4/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$ - это величина, обратно пропорциональная стандартному отклонению логарифмов эффективных радиусов пор σ. Параметр ψ_{ae} имеет смысл давления барботирования на изотерме иссушения изначально влагонасыщенной почвы. Отмеченные в литературе (Шеин, 2005) связи параметра α с давлением барботирования, а также параметра n с дифференциальной влагоемкостью почвы здесь предлагается описывать соотношениями $\alpha = -1/(\psi_0 - \psi_{ae})$ и $n = 4\bar{\mu}_0/\alpha$, где: ψ_0 - капиллярное давление влаги, соответствующее эффективному радиусу пор $\bar{r}_0$ (при $\psi = \psi_0$ приведенная объемная влажность почвы равна $\bar{\theta}_0 = 1/2$); $\bar{\mu}_0$ - значение функции приведенной дифференциальной влагоемкости почвы, вычисленное по формуле (14) при $\psi = \psi_0$. Функция приведенной дифференциальной влагоемкости почвы достигает своего максимума в т.н. *точке перегиба* кривой ОГХ при $\psi_{in} = \psi_{ae} + (\psi_0 - \psi_{ae})\exp(-8/(\pi n^2))$; в данной точке объемная влажность почвы принимает значение $\theta_{in} = \theta(\psi_{in}) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)/(1 + \exp(-8/(\pi n)))$, которое, по мнению авторов, соответствует *максимальной капиллярно-сорбционной влагоемкости почвы* (Воронин, 1986; Terleev *et al.*, 2010).

Результаты сравнения построенных моделей с аналогами и обсуждение

Далее поэтапно представлены результаты сравнительного анализа построенных моделей и хорошо известных формул Ван Генухтена (см. табл. и рис.).

Первый этап. Для построения кривых по формулам (2) и (5) обычно используется измеренная ОГХ. Здесь предпринята имитация ОГХ с использованием данных, для вычисления которых заданы статистики нормального распределения логарифмов эффективных радиусов почвенных пор $\ln \bar{r}_0 = -1.1087$ и $\sigma = 0.6383$, а также характеристики капиллярных свойств порового пространства почвы $r_{max} = 0.149 \cdot 10^{-2}$ см; $\psi_{ae} = -100$ см вод.ст. и $\beta = 0.149$ см^2 (Brutsaert, 1966, 2000; Kosugi, Hopmans, 1998; Kosugi, 1999). По формулам (11) с заданными показателями рассчитаны параметры функции дифференциальной влагоемкости почвы $\alpha = 0.33 \cdot 10^{-2}$ см вод.ст.$^{-1}$ и $n = 2.5$. Затем с использованием параметров α, n и ψ_{ae} по формуле (13*a*) построена кривая (на рис. - белые внутри точки), которая имитирует ОГХ. Наряду с этим по формуле (16*a*) построена кривая (на рис. - черные точки), которая имитирует отношение гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации почвенной влаги. Формулы (13*b*) и (16*b*) использованы для построения сплошных кривых 1 и 2, которые изображают аппроксимации соответствующих функций.

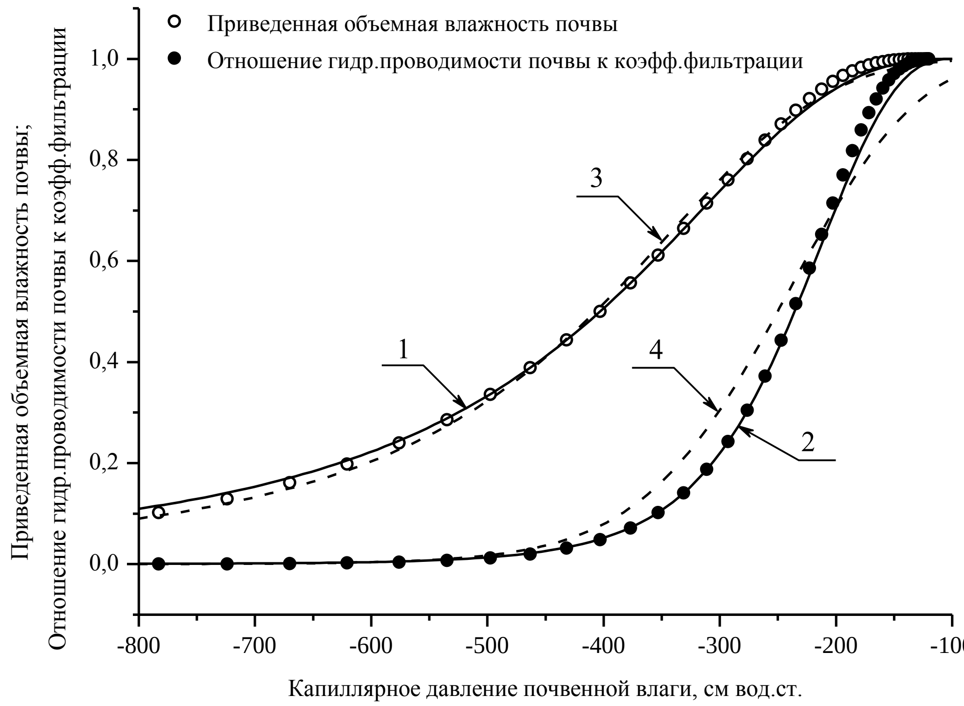

Рис. Сравнение формул Муалема-Ван Генухтена с предложенными аппроксимациями ОГХ и отношения гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги (пояснения в тексте)

<u>Второй этап.</u> При помощи модели (2) с соотношением $m = 1 - 1/n$ интерполированы точки имитированной ОГХ, рассчитаны параметры этой модели и пунктиром построена кривая 3, которая изображает аппроксимацию ОГХ Ван Генухтена. С использованием этих же параметров построена пунктирная кривая 4, которая изображает отношение $k(\psi)/k_S$ (5), вычисленное методом Муалема-Ван Генухтена.

На рисунке видно, что модели (13*b*) и (2) имеют соизмеримую (одного порядка) достаточно высокую точность аппроксимации: средние квадраты отклонений расчетных значений от имитированной эмпирической ОГХ составляют $0.101 \cdot 10^{-3}$ и $0.131 \cdot 10^{-3}$, соответственно. Из сравнения моделей (16*b*) и (5) следует, что первая имеет более высокую (на порядок) точность аппроксимации: средние квадраты отклонений расчетных значений от имитированного отношения $k(\psi)/k_S$ составляют $0.250 \cdot 10^{-3}$ и $0.289 \cdot 10^{-2}$, соответственно. При этом параметры моделей (13*b*) и (16*b*) оценены по заданным физико-статистическим показателям почвы, а параметры в формулах (2) и (5) вычислены методом интерполяции данных, которые имитируют ОГХ.

Таблица. Две системы почвенно-гидрофизических функций

Система Муалема-Ван Генухтена	Предложенная в настоящей статье система
Водоудерживающая способность почвы	
Аппроксимация ОГХ в виде функции, которая интерполирует экспериментальные данные $\bar{\theta} = \begin{cases} 1/\left(1 + (-\alpha\psi)^n\right)^m, \psi < 0; \\ 1, \psi \geq 0 \end{cases}$	Первообразная теоретически обоснованной функции дифференциальной влагоемкости почвы и аппроксимация этой первообразной $\bar{\theta} = \begin{cases} \left(\operatorname{erf}\left(\left(-\sqrt{\pi}/4\right)\ln\left(-\alpha(\psi - \psi_{ae})\right)^n\right) + 1\right)/2 \approx \\ \approx 1/\left(1 + \left(-\alpha(\psi - \psi_{ae})\right)^n\right), \psi < \psi_{ae}; \\ 1, \psi \geq \psi_{ae}. \end{cases}$
Дифференциальная влагоемкость почвы	
Производная функции, аппроксимирующей ОГХ $\frac{d\bar{\theta}}{d\psi} = \begin{cases} mn\alpha^n(-\psi)^{n-1}\left(1 + (-\alpha\psi)^n\right)^{-(m+1)}, \psi < 0; \\ 0, \psi \geq 0 \end{cases}$	Функция, обоснованная в рамках представлений о капиллярности и логнормальном распределении эффективных радиусов пор $\bar{\mu} = \begin{cases} -(n/4)/(\psi - \psi_{ae})\exp\left(-\pi(n/4)^2\ln^2\left(-\alpha(\psi - \psi_{ae})\right)\right), \psi < \psi_{ae}; \\ 0, \psi \geq \psi_{ae}. \end{cases}$
Отношение гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги	
Используется аппроксимация ОГХ с соотношением параметров $m = 1 - 1/n$ $\frac{k}{k_S} = \begin{cases} \left(1 + (-\alpha\psi)^n\right)^{-m/2} \times \\ \times\left(1 - \left(1 - \left(1 + (-\alpha\psi)^n\right)^{-1}\right)^m\right)^2, \psi < 0; \\ 1, \psi \geq 0. \end{cases}$	Используется теоретически обоснованная функция дифференциальной влагоемкости почвы $\frac{k}{k_S} = \begin{cases} \left(1/\left(4\sqrt{2}\right)\right)\sqrt{\operatorname{erfc}\left(\left(n\sqrt{\pi}/4\right)\ln\left(-\alpha(\psi - \psi_{ae})\right)\right)} \times \\ \times\left(\operatorname{erfc}\left(\left(n\sqrt{\pi}/4\right)\ln\left(-\alpha(\psi - \psi_{ae})\right) + 2/\left(n\sqrt{\pi}\right)\right)\right)^2 \approx \\ \approx\left(1 + \left(-\alpha(\psi - \psi_{ae})\right)^n\right)^{-1/2} \times \\ \times\left(1 + \exp\left(8/(n\pi)\right)\left(-\alpha(\psi - \psi_{ae})\right)^n\right)^{-2}, \psi < \psi_{ae}; \\ 1, \psi \geq \psi_{ae}. \end{cases}$
Общие параметры почвенно-гидрофизических функций	
Эмпирические параметры α и n оцениваются методом интерполяции точек измеренной ОГХ или с использованием педотрансферных функций.	Физико-статистически интерпретированные параметры α и n теоретически обоснованных функций. Оценки параметров аппроксимаций данных функций по измеряемым показателям почвы: $\alpha = r_{max}\bar{r}_0 g\rho_w/(2\gamma\cos\varphi) \approx r_0 g\rho_w/(2\gamma\cos\varphi)$; $n = 4/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$.

Выявлены следующие преимущества предложенной здесь системы гидрофизических функций почвы перед системой функций (2) и (5). Во-первых, принимая во внимание, что обе системы являются замкнутыми по параметрам, эти параметры адекватно интерпретированы только в построенных здесь моделях. Во-вторых, авторы настоящей статьи используют методологически более предпочтительный способ расчета отношения $k(\psi)/k_S$, в котором применяется теоретически обоснованная функция дифференциальной влагоемкости почвы, а не малодоступные данные измерений ОГХ, интерполированные функцией (2) с проблемным соотношением параметров $m = 1 - 1/n$. В-третьих, по сравнению с формулами (2) и (5) предложенные здесь функции, аппроксимирующие ОГХ и отношение $k(\psi)/k_S$, имеют соизмеримую или более высокую точность, а их параметры оценены по физическим показателям почвы.

ВЫВОДЫ

1) Представлено теоретическое обоснование функции дифференциальной влагоемкости почвы и первообразной этой функции в виде ОГХ.

2) Усовершенствован метод Муалема-Ван Генухтена: в расчетах отношения функции гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации почвенной влаги модель (2) с проблемным соотношением параметров $m = 1 - 1/n$ не применятся, а используется теоретически обоснованная функция дифференциальной влагоемкости почвы.

3) Параметры α, n и ψ_{ae} системы почвенно-гидрофизических функций адекватно интерпретированы в рамках представлений о почве как капиллярно-пористом теле.

4) Для ОГХ и отношения гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги предложены достаточно точные аппроксимации в классе элементарных функций, общие параметры которых оценены с использованием статистик логнормального распределения эффективных радиусов пор и показателей капиллярности почвы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке DAAD, DFG и РФФИ № 09-05-00415-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Арефьев Н.В., Баденко В.Л., Терлеев В.В., Латышев Н.К., Крылова И.Ю., Глядченкова Н.А. 2011. Определение водно-физических свойств почв при мелиоративных изысканиях. Мелиорация и водное хозяйство. 2:18-21.

Баденко В.Л., Баденко Г.В., Терлеев В.В., Латышев Н.К. 2011. ГИС-технологии в информационном обеспечении системы имитационного моделирования AGROTOOL. Агрофизика. 3:1-5.

Баденко В.Л., Терлеев В.В., Миршель В., Никонова О.Г. 2013. Учет пространственной вариабельности гидрофизических свойств почв при моделировании продукционного процесса растений. Агрофизика. 1:13-22.

Банкин М.П., Заславский Б.Г., Терлеев В.В. 1988. Автоматизированная система определения влагопроводности почв. Научно-технический бюллетень по агрономической физике. 72:33-36.

Воронин А.Д. 1986. Основы физики почв. М.: МГУ. 244 с.

Глобус А.М. 1969. Экспериментальная гидрофизика почв. Л.: Гидрометеоиздат. 356 с.

Заславский Б.Г., Терлеев В.В. 1988. Моделирование гидрофизических характеристик почв: Тез. докл. Всес. школы-семинара «Автоматизация научных исследований и проектирования АСУ ТП в мелиорации». Фрунзе: ВНИИКАмелиорация. С. 82.

Заславский Б.Г., Опарина И.В., Терлеев В.В. 1988. Диалоговая система формирования банка гидрофизических характеристик почв. Доклады Российской академии сельскохозяйственных наук. 11:40-42.

Полуэктов Р.А., Терлеев В.В. 2002. Моделирование водоудерживающей способности и дифференциальной влагоемкости почвы. Метеорология и гидрология. 11:93-100.

Полуэктов Р.А., Опарина И.В., Терлеев В.В. 2003. Три способа расчета динамики почвенной влаги. Метеорология и гидрология. 11:90-98.

Полуэктов Р.А., Терлеев В.В. 2005. Моделирование водоудерживающей способности почвы с использованием агрогидрологических характеристик. Метеорология и гидрология. 12:98-103.

Терлеев В.В. 2000. Моделирование водоудерживающей способности почв как капиллярно-пористых тел: Учеб.-метод. пособ. с предисловием А.М. Глобуса. СПб.: НИИ химии СПбГУ. 71 с.

Терлеев В.В., Полуэктов Р.А., Бакаленко Б.И. 2012а. Структура информационного обеспечения модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. Агрофизика. 2:29-36.

Терлеев В.В., Mirschel W., Баденко В.Л., Гусева И.Ю., Гурин П.Д. 2012б. Физико-статистическая интерпретация параметров функции водоудерживающей способности почвы Агрофизика. 4:1-8.

Терлеев В.В., Топаж А.Г., Миршель В., Гурин П.Д. 2014. Моделирование водоудерживающей способности почвы на основе представлений о капиллярном гистерезисе и логнормальном распределении пор по размерам: теория. Агрофизика. 1:9-19.

Шеин Е.В. 2005. Курс физики почв: Учебник. М.: Изд-во МГУ. 432 с.

Ahuja L.R., Swartzendruber D. 1972. An improved form of soil-water diffusivity function. Soil Sci. Soc. Am. Proc. 36:9-14.

Brutsaert W. 1966. Probability laws for pore-size distribution. Soil Sci. 101:85-92.

Brutsaert W. 2000. A concise parameterization of the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Adv. in Water Resources. 23:811-815.

D'Hollander E.H. 1979. Estimation of the pore size distribution from the moisture characteristic. Water Resour. Res. 15:107-112.

Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G. 1977. A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration. Soil Sci. Soc. Am. J. 41:285-294.

Kosugi K. 1994. Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention. Water Resour. Res.. 30:891-901.

Kosugi K. 1996. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties. Water Resour. Res. 32:2697-2703.

Kosugi K., Hopmans J.W. 1998. Scaling water retention curves for soils with lognormal pore-size distribution. Soil Sci. Soc. Am. J. 62:1496-1505.

Kosugi K. 1999. General model for unsaturated hydraulic conductivity for soil with lognormal pore-size distribution. Soil Sci. Soc. Am. J. 63:270-277.

Mualem Y. 1976. A new model for predicting hydraulic conductivity of unsaturated porous media. Water Resour. Res. 12:513-522.

Poluektov R.A., Fintushal S.M., Oparina I.V., Shatskikh D.V., Terleev V.V., Zakharova E.T. 2002. Agrotool - a system for crop simulation. Archives of Agronomy and Soil Science. 48(6):609-635.

Terleev V.V., Mirschel W., Schindler U., Wenkel K.-O. 2010. Estimation of soil water retention curve using some agrophysical characteristics and Voronin's empirical dependence. International Agrophysics. 24(4):381-387.

Van Genuchten, M.Th. 1980. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J. 44:892-989.

Vereecken H., Weynants M., Javaux M., Pachepsky Y., Schaap M.G., Van Genuchten M.Th. 2010. Using pedotransfer functions to estimate the Van Genuchten-Mualem soil hydraulic properties: A review. Vadose Zone J. 9:795-820.

Winitzki S. 2008. A handy approximation for the error function and its inverse (in https://sites.google.com/site/winitzki/sergei-winitzkis-files/erf-approx.pdf?attredirects=0).