

ведения коэффициентов корреляции непосредственных стохастических связей в биосистемах. Данное соотношение может использоваться для выделения коэффициентов K1-группы в корреляционных матрицах биосистем и построения графа непосредственных стохастических связей. В свою очередь структура графа определяет формулы и алгоритм формирования и заполнения *Gauss*-массивов, которые необходимы для имитации стохастических переменных в виртуальных биосистемах.

Получаемые по разработанному алгоритму графы являются ненаправленными. Для превращения их в направленные графы необходимо дополнительно проанализировать корреляционные матрицы методом главных компонент (Jolliffe, 2002).

Исследования поддержаны грантом РФФИ 12-04-00409-а.

### Литература

Воробьев Н. И., Проворов Н. А., Свиридова О. В., Пищик В. Н., Патыка Н. В., Думова В. А., Круглов Ю. В. Ранг генетического дизайна и адаптационный потенциал растительно-микробных систем // Труды по ботанике, генетике и селекции. СПб.: ВИР, 174, 2013. С. 61–67. ISSN 0202-3628.

Уокенбах Д. Excel 2010: профессиональное программирование на VBA. Изд. Вильямс, 2012. 944 с.

Vox G.E.P., Muller M.E. A Note on the Generation of Random Normal Deviates. The Annals of Mathematical Statistics. 1958. 2(29): 610–611.

Jolliffe I.T. Principal Component Analysis. Springer. 2002. 489 p.

## СМЕНА ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ПОПУЛЯЦИЯХ С КОРОТКИМ ЖИЗНЕННЫМ ЦИКЛОМ: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

*Е. Я. Фрисман, Г. П. Неверова*

Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН

В данной работе предлагается математическая дискретная во времени структурированная модель динамики численности популяций. Модель построена на основе особенностей жизненного цикла биологических видов с коротким жизненным циклом (например, лемминги, полевки и др.). Также в модели учитываются наблюдаемые в природе нелинейные взаимовлияния различных возрастных групп на рождаемость особей. Уравнения динамики имеют вид:

$$\begin{cases} x_{n+1} = e^{-\beta_1 \cdot x - \beta_2 \cdot y} \cdot (b_1 \cdot x_n + b_2 \cdot y_n) \\ y_{n+1} = s \cdot x_n + v \cdot y_n \end{cases},$$

где  $x$  – численность особей, только достигших половой зрелости (в частности сюда водят особи, рожденные под снегом);  $y$  – «взрослые» перезимовавшие особи, участвовавшие в размножении в прошлом году;  $n$  – номер сезона раз-

множения;  $b_1$  и  $b_2$  – параметры, характеризующие репродуктивные потенциалы соответствующих половозрелых групп;  $s$ ,  $v$  – коэффициенты выживаемости;  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – коэффициенты лимитирования.

Проведено подробное аналитическое и численное исследование предложенной модели. Установлено, что данная система имеет единственное нетривиальное равновесие. В зависимости от значений демографических параметров модели определены условия его устойчивости, изучены сценарии перехода от равновесия к нерегулярной динамике. Ряд сделанных численных экспериментов показал, что в фазовом пространстве исследуемой модели могут сосуществовать несколько аттракторов со своими бассейнами притяжения (рис. 1).

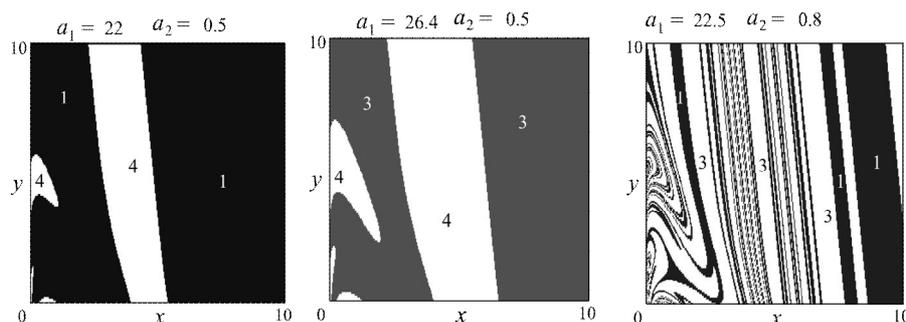


Рис. 1. Бассейны притяжения модели при  $v = 0.1$  и  $\beta_1/(s\beta_2) = 1.7$ ,  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = sb_2$ .

Цифрами обозначены длины наблюдаемых циклов.

В частности обнаружилось, что в области параметров, где равновесие популяции устойчиво, существует подобласть, в которой наряду с данным равновесием появляется еще устойчивый аттрактор - цикл длины три. Цикл длины три возникает в результате касательной бифуркации. В целом в разных областях параметрического пространства возможно сосуществование следующих предельных режимов: устойчивое равновесие и цикл длины 3; устойчивое равновесие и цикл длины 4, который также возникает в результате касательной бифуркации; цикл длины 3 и 4. Деление фазового пространства циклами 3 и 4 особо примечательно, поскольку для популяций мелких грызунов отмечаются циклы как длины 3, так и длины 4.

Соответственно в предложенной модели при одних и тех же значениях параметров и в зависимости от начальных условий существуют качественно различные предельные режимы (аттракторы): положение равновесия, конечные циклы и хаотический аттрактор. Данные особенности динамического поведения предложенной модели позволяют объяснить смену динамических режимов, наблюдаемую в природе.

Для анализа влияния начального приближения на траектории данной модели были построены бассейны притяжения и карты асимптотических динамических режимов. Результаты численных экспериментов показали, что характер динамики популяции существенно зависит от начальных условий (или текущих значений численности). Следовательно, если влияние внешних факторов рассматривать, как модификацию начального условия, то диапазон возможных динамических режимов существенно расширяется.

Предложенная модель применена к описанию динамики численности популяции рыжей полевки, обитающей в Удмуртии (рис. 2). Оценки коэффициентов модели получены путем минимизации различий между модельными значениями и реальными данными учета численности при помощи метода Левенберг-Маркварда. Установлено, что точечная оценка параметров модели находится в зоне цикла длины 6 (возникшего в результате бифуркации удвоения периода 3-цикла), однако влияние климатических факторов смещает ее в зону квазипериодической динамики.



Рис. 2. Динамика относительной численности популяции рыжей полевки.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований «Дальний Восток».*

## УПРАВЛЕНИЕ СТРУКТУРОЙ ДВУХВИДОВОЙ СИСТЕМЫ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА» С МИГРАЦИЕЙ

*А. С. Иванова, А. Н. Кириллов*

Институт прикладных математических исследований  
Карельского научного центра РАН

В классической работе [1] представлены «условия ухода популяции хищника из ареала» для статичной модели. В работе [2] построена модель системы Вольтерра «хищник – жертва», в которой хищник может мигрировать в другие ареалы в случае недостатка жертв. В представленном докладе в данную модель вводится управление, заключающееся в изъятии особей хотя бы одного из видов, и исследуется задача сохранения структуры биосообщества за счет выбора скоростей изъятия.

Итак, рассмотрим модель «хищник – жертва» с миграцией, учитывающую изъятие особей:

если  $\tilde{n} > \Lambda$  :

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2 - u_1), \quad \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m - u_2), \quad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \quad (1)$$

если  $\tilde{n} < \Lambda, x_2 > \varepsilon^*(x_1)$  :

$$\dot{x}_1 = ax_1, \quad \dot{x}_2 = -mx_2, \quad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \quad (2)$$